

Teoretická část - 21.6.2022

1. (a) Definujte prostory $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (2 body).
- (b) Definujte Fourierovu transformaci a inverzní Fourierovu transformaci pro prvky $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ a zformulujte větu o Fourierově transformaci na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (2 body).
- (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ a $\varphi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
 - i. $\int_{\mathbb{R}} \varphi \mathcal{F}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi \mathcal{F}(\varphi),$
 - ii. pro zobrazení $T_\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definované jako

$$T_\varphi(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \psi, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

platí $T_\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ a $\mathcal{F}(T_\varphi) = T_{\mathcal{F}(\varphi)}$, kde $T_{\mathcal{F}(\varphi)}$ je definováno jako

$$T_{\mathcal{F}(\varphi)}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi) \psi, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

- iii. $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)) = T, \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = T,$
 - iv. pokud $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(S)$, potom $T = S,$
 - v. je-li $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, potom zobrazení $T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f \varphi$ je dobře definovaná temperovaná distribuce.
- Vše řádně zdůvodněte (4 body).

2. (a) Definujte křivkový integrál v $\mathbb{C}$, primitivní funkci (v $\mathbb{C}$) a křivkovou souvislost otevřených podmnožin $\mathbb{C}$ (2 body).
- (b) Zformulujte lemma o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce, větu o existenci primitivní funkce a Cauchyho větu (3 body).
- (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro **oblast** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a funkce $f, g \in H(\Omega)$:
- i. má-li f primitivní funkci na Ω , potom má $\frac{1}{f}$ primitivní funkci na $\Omega \setminus \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$,
 - ii. jsou-li F a G dvě primitivní funkce k f na Ω , potom existuje $C \in \mathbb{C}$, že $F - G = C$ na Ω ,
 - iii. pokud f ani g nemají primitivní funkci na Ω , potom $f \cdot g$ nemá primitivní funkci na Ω ,
 - iv. pokud f i g mají primitivní funkci na Ω , potom $f \cdot g$ má primitivní funkci na Ω .
- Vše řádně zdůvodněte (3 body).

3. (a) Definujte Laurentovu řadu (1 bod).
- (b) Zformulujte věty o Cauchyho vzorci, holomorfní funkci jako mocninné řadě a holomorfní funkci jako Laurentově řadě (3 body).
- (c) Zformulujte větu jednoznačnosti pro holomorfní funkce (1 bod).
- (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro **oblast** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ a $f \in H(\Omega)$:
- i. je-li f' nulová na okolí bodu a , potom f je konstantní na Ω ,
 - ii. je-li f' nulová na okolí bodu a , potom f je konstantní na okolí bodu a ,
 - iii. je-li $f^{(n)}(a)$ nenulová jen pro konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, potom existuje polynom P , že $f = P$ na Ω ,
 - iv. je-li $f^{(n)}(a)$ nenulová jen pro konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, potom existuje polynom P , že $f = P$ na okolí bodu a .
- Vše řádně zdůvodněte (3 body).